Una demostración no usual en Geometría

Resumen

La demostración que realizaremos está relacionada con un ejercicio de geometría elemental el cual lo analizaremos desde dos puntos de vista "totalmente diferentes". El primero tomando como base elementos muy conocidos en matemática transformación de un número de decimal a fracción y la suma de los mismos (método aproximado). En la segunda parte se fundamentará en la aplicación de herramientas del análisis matemático de manera más precisa: teoría de límites para una función real, cálculo diferencial, integral para funciones en una variable, sumatorias y series de funciones reales (método exacto). Tomando en cuenta las dos situaciones anteriores, en el presente artículo se demuestra que ambos puntos de vista coinciden. Es por ello que en la demostración que ponemos en consideración se toman en cuenta los dos criterios; los cuales nos conducen a mismo resultado sin importar el método, sino la manera como se hace el estudio de un problema y mucho más si está relacionado con alguna rama de la Matemática, en otras palabras debemos utilizar y aplicar los recursos disponibles de tal manera que podamos dar solución a circunstancias que nos suceden en nuestro diario vivir, sin que necesariamente sigamos un camino trazado por otro.

Palabras clave: *Geometría, postulado, demostración.*

Abstract

We'll show a coincidence on results from the next two perspectives. To do it, we'll use an elementary geometry exercise. First, we'll transformate it from a decimal number to a fraction, and we'll sum them (approximation method). Second, we'll base on the application of more precise math analysis tools like: theory of limits for a real function, differential calculus, integrals for one variable functions, summations, and real function series (exact method). The reader has to know that these two perspectives not always have the same results. That's why it's so important to take a better way to solve problems solved before for other people with other kind of resources. It's not a big problem to follow, or not, to other people in their solutions.

Key words: *Geometry, postulate, demonstration.*

POR: Franklin Coronel Maji, Dr.[1]

E-mail
fmcoronel19@hotmail.com

Recibido: Diciembre, 2009
Aceptado: Abril, 2010

[1]Doctor en Matemática, Escuela Superior Politécnica del Chimborazo. Ex director del area de Matematica y Fisica del liceo Albert Einstein , Unidad Educativa Nº 3, de la Fuerza Aérea Ecuatoriana, Taura. Tiene publicaciones en le revista de la Politécnica de Chimborazo y el Tecnologico Albert Einstein en el campo de la Matematica, investigación sobre la teoria de complejos simplixiales, homologias de funciones en el espacio n-dimensional, Teorema de DE RHAM.


EM
idad de Madrid
IRSST:
713 123

Introducción

La Geometría como rama de la Matemática es la ciencia dedicada a describir, analizar y encontrar nuevas aplicaciones a las formas espaciales que nos rodean. En la actualidad se constituye en uno de los instrumentos más importantes en el desarrollo de ciencias ligadas a la ingeniería.

El hablar o escuchar del término "Geometría" nos trae a la mente nombres de matemáticos y geómetras tales como Euclides, Platón, Lobatchewski entre los más conocidos y que con seguridad hemos escuchado en algún momento, recordemos entonces aquella frase célebre de Platón " QUE NADIE ENTRE AQUÍ SI NO SABE GEOMETRIA" [1]. Esta frase nos parece un poco egoísta pues entenderíamos que la geometría es una ciencia que no puede ser entendida por cualquier persona que tenga interés en ella, sin embargo se debe tener presente que para realizar o iniciar la incursión en cualquier ciencia se debe tener muy en claro los fundamentos o términos primitivos que dieron origen a la misma, pues nos conduce por el camino amplio del conocimiento y nos ayuda a entender el verdadero sentido y la razón de ser de dicha ciencia.

Aquellos términos primitivos y en los cuales se fundamenta la Geometría son punto, recta, plano. En cualquier lugar donde nos encontremos siempre encontraremos objetos, cosas, incluso lugares que toman o tienen forma de una figura geométrica.

Se distinguen dos tipos de geometría, la Euclidiana (o de Euclides) y la no Euclideana; cuyo punto de ruptura está dado por el muy famoso y conocido V postulado [2]. Al no asumir este postulado, se da inicio a la creación de otras geometrías (las no Euclideanas) como la de Lobatchewski, o la de Reamman que son de mucha utilidad en el desarrollo de la humanidad.

Dentro de la Matemática suelen presentarse dificultades, sobre todo en el momento de hacer ejercicios que demandan la ejecución de un número ilimitado de operaciones aritméticas, lo que nos conduce a realizar aproximaciones y obtener un resultado cercano al verdadero; pero gracias al Análisis Matemático, que ha desarrollado herramientas de cálculo como límites, derivadas e integrales, es posible llegar al valor real; la cual es mirado con mayor satisfacción por parte de los estudiantes.

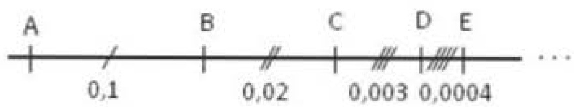
Esta situación me condujo a poner en consideración la resolución de un ejercicio de Geometría elemental por ambas vías, para que al final se puedan realizar comparaciones y sacar conclusiones útiles. Los tópicos del análisis matemático y serie de funciones se irán enunciando acorde se vaya desarrollando dicha resolución.

El problema que plantearemos tiene que ver con la teoría de segmentos, tomado de la Geometría de cuyo texto dice:

Problema: En una recta se toman los puntos A, B, C, D, E,..., sabiendo que AB=0,1u; BC=0,02u; CD=0,003;...; Calcular la longitud del segmento que es la suma de los segmentos dados. [3]

Respuesta: $\frac{10}{18}$ u.

Grafiquemos para entender e interpretar de mejor manera el ejercicio propuesto:



Desarrollo

a. Forma aproximada

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ... = 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}003 + 0{,}0004 + ...$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ... = 0{,}1234567...$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ... = 0{,}1234567... \cong \frac{10}{81} = 0{,}12345678$$

Expresado en fracciones tendremos:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ... = 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}003 + 0{,}0004 + ...$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ... = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + ...$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ... = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{4}{10^4} + ...$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ... = 0{,}1234567... \cong \frac{10}{81} = 0{,}12345678.$$

b. Forma "exacta"

Tomaremos en cuenta la siguiente notación para las fracciones:

$$0{,}1 = \frac{1}{10};$$

$$0{,}02 = \frac{2}{10^2};$$

$$0{,}003 = \frac{3}{10^3};\ \ldots$$

$$0{,}0000\ldots n = \frac{n}{10^n}$$

Recordando la notación de sumatoria obtenemos:

$$0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}003 + \ldots + 0{,}0000\ldots n = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

$$+ \frac{n}{\underbrace{1000\ldots0}_{\text{n ceros}}} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{n}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{10^k}$$

Se debe tener claro que esta sumatoria no termina en "n"; por el contrario, n tiende al infinito (∞); por lo tanto esta sumatoria se transforma en una serie de potencias [4].

En general se tiene que: $\sum_{k=1}^{n} a^k$ representa a "una sumatoria de los elementos con k que va de 1 hasta n". Esta es la lectura más conocida y utilizada en las sumatorias.

Ahora pues $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ representa una serie, en términos no muy formales es la suma de las sumatorias dadas anteriormente.

Por esta razón, es muy importante conocer las notaciones fundamentales de los términos y componentes matemáticos que se utilizarán en la resolución.

Tomando dicha notación tendremos que la sumatoria $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{10^k}$ se transforma en la serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{10^k} \tag{1}$$

Luego, la resolución del problema se resume en encontrar el valor de la serie (1).
Por propiedades de series [5], tenemos:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{10^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{10}\right)^k \tag{2}$$

Realizando la sustitución $x = \frac{1}{10}$ en la serie (2) y representándola en forma polinómica:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, x\, x^{k-1} = x \sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1} \tag{3}$$

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1}$ se la puede resolver mediante la siguiente técnica:

en primer lugar se encuentra la integral de la serie y posteriormente aplicamos la derivada, con la finalidad de "anular" el efecto de la integral y volver nuevamente a la serie original.

En tal sentido, empleando la integral y sus propiedades, tenemos:

$$\int \sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1}\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int k\, x^{k-1}\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{x^{k}}{k} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k} \tag{4}$$

El resultado (4) se justifica pues:

$$\int k\, x^{n} dx = k \int x^{n} dx = k \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + C$$

con $k \in \mathbf{R}$ [6].

Tomando en cuenta la serie que va desde x elevado al exponente uno hasta el infinito, tenemos:.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k} = x + x^{2} + x^{3} + \ldots + x^{n} + \ldots$$

Sacando factor común x en los n primeros términos:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k} = x \left(1 + x^{2} + x^{3} + \ldots + x^{n-1} \right) + \ldots \tag{5}$$

Vamos a trabajar con la suma de potencias [7]:

$$1 + x^{2} + x^{3} + \ldots + x^{n-1}$$

Si multiplicamos y dividimos por el factor (1 - x); y recordando la diferencia de potencias, tenemos:

$$1 + x^{2} + x^{3} + \ldots + x^{n-1} = \left(1 + x^{2} + x^{3} + \ldots + x^{n-1} \right) \frac{(1-x)}{(1-x)} = \frac{1-x^{n}}{1-x}$$

Quedando la expresión (5) como:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = x\left(1 + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1}\right) + ... = \frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x} + ...$$

$$\sum_{k-1}^{+\infty} x^k = \frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x} + ... \tag{6}$$

Aplicando el límite al segundo lado de la expresión cuando n tiende al infinito [8]; y como $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ cuando $|x| < 1$, ver referencia [9], se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x} = \frac{x\left(1-\lim_{n\to\infty} x^n\right)}{1-x} = \frac{x\left(1-0\right)}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x} = \frac{x}{1-x} \tag{7}$$

Resumiendo hasta el momento el trabajo realizado, y recopilando los resultados parciales (7), (6), (5) y (4) se llega a obtener que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x} = \frac{x\left(1-\lim_{n\to\infty} x^n\right)}{1-x} = \frac{x\left(1-0\right)}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Es decir

$$\int \sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1}\, dx = \frac{x}{1-x} \tag{8}$$

Para comprobar el valor del integral o comprobar su resultado, derivamos dicha respuesta. Es claro que la operación inversa de la derivación es la integración [10], que en nuestro caso, se lo puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1} = \frac{d}{dx}\left[\int \sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1}\, dx\right]$$

Trabajando con una notación más familiar:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1} = \left[\int \sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1}\,dx\right]^{`}$$

Y gracias al resultado (8) se tiene:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{`} \qquad (9)$$

Recordando la regla para derivar un cociente [11]:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{`} = \frac{f^{`}(x)\cdot g(x) - g^{`}(x)\cdot f(x)}{g^{2}(x)}$$

donde las expresiones y son las derivadas de las funciones f(x) y g(x) respectivamente. Además, la derivada de una constante es igual a cero [12]; procedemos entonces a calcular la derivada expresada en (9):

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{`} = \frac{x^{`}(1-x)-x(1-x)^{`}}{(1-x)^2} = \frac{1(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Luego:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (10)$$

Reemplazando este resultado en la expresión (3) tenemos:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k} = x\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1} = x\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right] = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Y retomando la sustitución de $x = \frac{1}{10}$; encontramos el resultado de la serie (1):

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{10^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k} = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1}{10}}{\left(1-\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{1}{10}}{\left(\frac{9}{10}\right)^2} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{81}{100}} = \frac{10}{81}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{10^k} = \frac{10}{81}$$

CONCLUSIONES

Los caminos para realizar una demostración o resolver un ejercicio son diversos, dependiendo de la óptica de la persona que requiere hacerlo; para este caso particular, el problema puede resolverse por dos métodos totalmente diferentes, tomando en el primer método fundamentos básicos como son la transformación de números decimales a fracciones y aplicar la suma de los mismos (método aproximado); y en el segundo elementos e instrumentos del análisis matemático como son: límites, derivadas, integrales, sumatorias y series de potencias (método exacto).

Las respuestas obtenidas por ambos métodos, difieren en una cantidad despreciable para muchas personas que miran la Matemática como una ciencia más; sin embargo individuos que tenemos otro punto de vista, entendemos que dicha cantidad despreciable es de gran importancia, por ejemplo, en ciencias de la ingeniería, donde se requiere trabajar con valores meramente exactos.

Entonces surge la pregunta: la Matemática es ¿exacta o aproximada? Más allá de dar respuesta a la interrogante, que quedará latente en la mente de los lectores, mi criterio es que se debe utilizar correcta y adecuadamente los instrumentos o elementos básicos del análisis que están íntimamente relacionados con cualquier actividad que hacemos de manera cotidiana.

Se debe dejar claro que los dos tipos de métodos aplicados son válidos, siempre y cuando se tome en consideración la formalidad que requiere cada uno de ellos.

Finalmente, espero con este artículo contribuir a la apertura de espacios de discusión alrededor del tema, pues ello enriquece el conocimiento personal y colectivo dentro de una universidad.

Referencias Bibliográficas

[1] Baldor, A. (2002). Algebra, México: Publicaciones Cultural, p.79.

[2] Historia de la Matemática. (2005). Moscú: Editorial MIR, p.215.

[3] Calvache, G. y Rosero, T. (2008).Geometría, primera parte,Quito, p. 58.

[4] Kudriavtsev, Análisis Matemático, volumen 1, pp. 562-595.

[5] Kudriavtsev, op. cit. pp. 65–80.

[6] Kudriavtsev, op. cit. pp. 398-401.

[7] Rudin, W. International Series Impure and Applied Mathematies, PJ Davis, Consulting Editors, p. 485

[8] Ankolmogorov, S. Elementos de Teoría de Funciones y Análisis Funcional. Moscú: Editorial MIR, pp. 661-668.

[9] Galdós, L. (2000). Matemáticas Edición 2000, Madrid: Editorial Cultura S.A, pp. 1081-1088.

[10] Kudriavtsev, op. cit. pp. 484-485.

[11] Ankolmogorov, op. cit. p. 181.

[12] Ankolmogorov, op. cit. p. 193.